

成長曲線モデル Preece & Baines- 1 パラメーターのExcel ソルバーによる簡単な求め方

筑波大学大学院人間総合科学研究科
外国人特別研究員

Csukas Attila

Excelのソルバーで何ができるのか

ソルバー、また最適化機能は、決められた条件の範囲で、複数のセルの値を変化させて、条件にあった最適値（最大、あるいは最小、また特定の値）を見つけることでユーザーをサポートするソフトウェアツールです。

計測データを最小二乗法によって非線形関数にあてはめるときや線形計画法で有効な方法です。

ソルバーを使うためにはどうすればよいのか

ソルバーを使うにあたって、モデルを作る必要があります。

- 決定変数を使って使う目的とする「もの」を特定する必要があります。
- 「もの」に制限がかかっているかをいわゆる制約条件で特定する必要があります。
- 最適化したい目的を特定する必要があります。

ソルバーは目的を最適化しながら、決定変数の制約条件を満たすような値を見つけられます。

モデルをどうやって定義すればよいのか

ソルバーは数字を扱っているので、モデルのエレメントを定量化する必要があります。

(決定変数、制約条件、目的関数、またこれらの関係)

ソルバーは経済の分野でよく使われていますが、それ以外の分野への応用も頻繁に行われています。

何をモデリングをしたいか、それに特有の設定が必要となります。

PB1モデルの式とパラメーター

それでは、非線形最小二乗フィッティング技法が背景となる Preece-Baines (1978)の成長曲線モデル、PB1パラメーターのソルバーによるモデリングを見てみましょう。

$$h = h1 - \frac{2(h1 - h\theta)}{\exp[s0(t - \theta)] + \exp[s1(t - \theta)]}$$

$h1$ = adult height
 $h\theta$ = height at θ age
 $s0$ = rate constant

$s1$ = rate constant
 θ = time constant

Excel での入力画面

	A	B	C	D	E	F	G
1	age	height observed	height predicted	d^2		final ht	h_1
2	6.527	117.2				Ht theta	h_θ
3	7.527	122.1				S0	s_0
4	8.605	128.3				theta	θ
5	9.541	133.1				S1	s_1
6	10.511	137.6					↑
7	11.532	146					変化させるセル
8	12.58	157.8					
9	13.451	167.5					
10	14.448	172.3					
11	15.417	174					目的セルの式
12	16.416	176.5					↓
13	17.413	176.5				sum squares	0
14	18.283	175.3				r	#DIV/0!
15			↑	↑			
16			PBモデル1の式	差分の二乗の式			

シートのAとB列に年齢と観測身長をそれぞれ入力します。

黄色の部分は空白にしておきます。この部分がPBモデル1のパラメーターになり、ソルバーでは「変化させるセル」と言います。

これらのセルに名前をつけました。その名前は、h_1、h_θ、s_0、θ、s_1です。

◇	A	B	C	D	E	F	G	
1	age	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)		
2	6.968	117.1	0	13712.41		Ht theta		
3	7.967	123.3	0	15202.89		S0		
4	9.046	129.4	0	16744.36		theta		
5	9.982	134.6	0	18117.16		S1		
6	10.951	139.2	0	19376.64			↑	
7	11.973	145.2	0	21083.04			変化させるセル	
8	13.021	151.1	0	22831.21				
9	13.892	159.9	=h_1-((2*(h_1-h_theta))/((EXP(s_0*(A9- theta)))+(EXP(s_1*(A9- theta)))))					
10	14.888	167.8	0	28156.84				
11	15.858	171.9	0	29549.61			目的セルの式	
12	16.857	175.7	0	30870.49			↓	
13	17.854	177.2	0	31399.84		sum squares	303447.86	
14	18.724	175.6	0	30835.36		r	#DIV/0!	
15			↑	↑				
16			PBモデル1の式	差分の二乗の式				

青色のC列にPBモデル1の式、

$$= h_1 - ((2 * (h_1 - h_{\theta})) / ((\text{EXP}(s_0 * (A2 - \theta))) + (\text{EXP}(s_1 * (A2 - \theta)))))$$

を入力し、これをC列にコピーします。

◇	A	B	C	D	E	F	G
1	age	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)	
2	6.968	117.1		13712.41		Ht theta	
3	7.967	123.3		15202.89		S0	
4	9.046	129.4		16744.36		theta	
5	9.982	134.6		18117.16		S1	
6	10.951	139.2		19376.64			
7	11.973	145.2		=(B7-C7)^2			↑ 変化させるセル
8	13.021	151.1		22831.21			
9	13.892	159.9		25568.01			
10	14.888	167.8		28156.84			
11	15.858	171.9		29549.61			↓ 目的セルの式
12	16.857	175.7		30870.49			
13	17.854	177.2		31399.84		sum squares	303447.86
14	18.724	175.6		30835.36		r	#DIV/0!
15			↑	↑			
16			PBモデル1の式	差分の二乗の式			

青色のD列に残差、すなわち観測・予測身長 d の差分の二乗の式
 $(= (B2 - C2)^2)$ を入力し、D列にコピーします。

緑色のG13セルが目的セル（残差平方和）となります。
 ここで残差 d を二乗し合計しています（ $= \text{SUM}(D2:D14)$ ）。
 最小二乗法の場合では、この値がより小さくなることが当てはまりの良さに
 関与してきます。

G14では、観測値と予測値の相関係数（重相関）を、
 $(= \text{CORREL}(B2:B14, C2:C14))$ で計算しています。

実際に推定してみる

非線形問題をソルバーで解くには、変化させるセルの初期値を設定する必要があります。今回は最初から変化させるセルのすべてに2という値を設定します。これで予想と違う結果（たとえば最終身長値）が出た時は、異なる初期値を指定して再計算します。

◇	B	C	D	E	F	G
1	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)	2
2	117.1	2	13248.01		Ht theta	2
3	123.3	2	14713.69		S0	2
4	129.4	2	16230.76		theta	2
5	134.6	2	17582.76		S1	2
6	139.2	2	18823.84			↑
7	145.2	2	20506.24			変化させるセル
8	151.1	2	22230.81			
9	159.9	2	24932.41			
10	167.8	2	27489.64			
11	171.9	2	28866.01			目的セルの式
12	175.7	2	30171.69			↓
13	177.2	2	30695.04		sum squares	295627.86
14	175.6	2	30136.96		r	#DIV/0!
15		↑	↑			
16		PBモデル1の式	差分の二乗の式			

ソルバーでの条件設定

Excel画面で目的セル（G13）をクリックした状態で，[ツール] → [ソルバー] メニューをクリックすると，ソルバーが起動して，「ソルバーパラメーター設定画面」が表示されます。

	B	C	D	E	F	G
1	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)	2
2	117.1		2	13248.01	Ht theta	2
3	123.3		2	14713.69	S0	2
4	129.4		2	16230.76	theta	2
5	134.6		2	17582.76	S1	2
6	139.2		2	18823.84		
7	145.2		2	20506.24		↑ 変化させるセル
8	151.1		2	22230.81		
9	159.9		2	24932.41		
10	167.8		2	27489.64		
11	171.9		2	28866.01		目的セルの式
12	175.7		2	30171.69		↓
13	177.2		2	30695.04	sum squares	295627.86
14	175.6		2	30136.96	r	#DIV/0!
15		↑		↑		
16		PBモデル1の式	差分の二乗の式			

ソルバー：パラメータ設定

目的セル：

目標値： 最大値 最小値 値

変化させるセル：

制約条件：

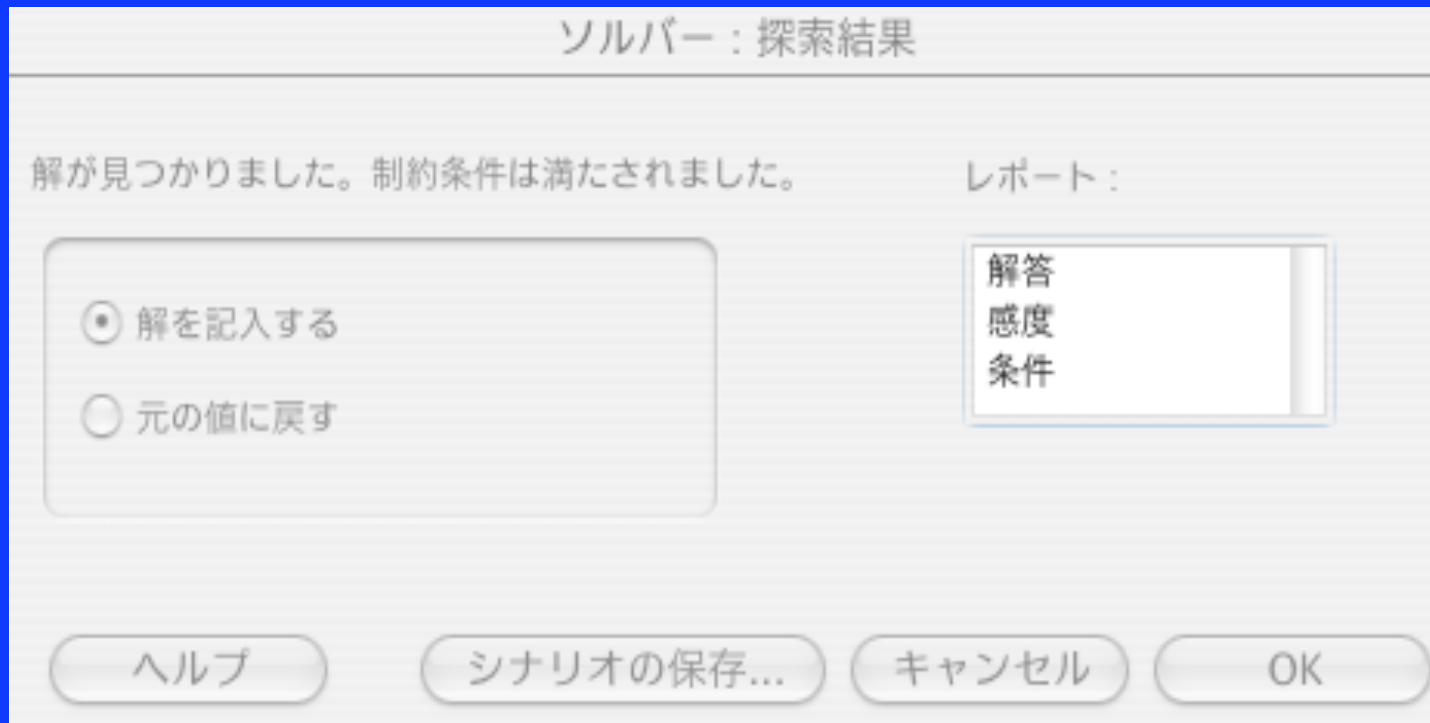
目的セルにExcel 画面の目的セルを指定します。

目標値の「値」をチェックし、0を指定します。

変化させるセルにExcel 画面での黄色の範囲を指定します。

計算の実行とその結果

「ソルバー：パラメータ設定画面」で「実行」ボタンをクリックすると計算が実行されて、「ソルバー：探索結果」画面が表示され、Excel画面が解の画面になります。



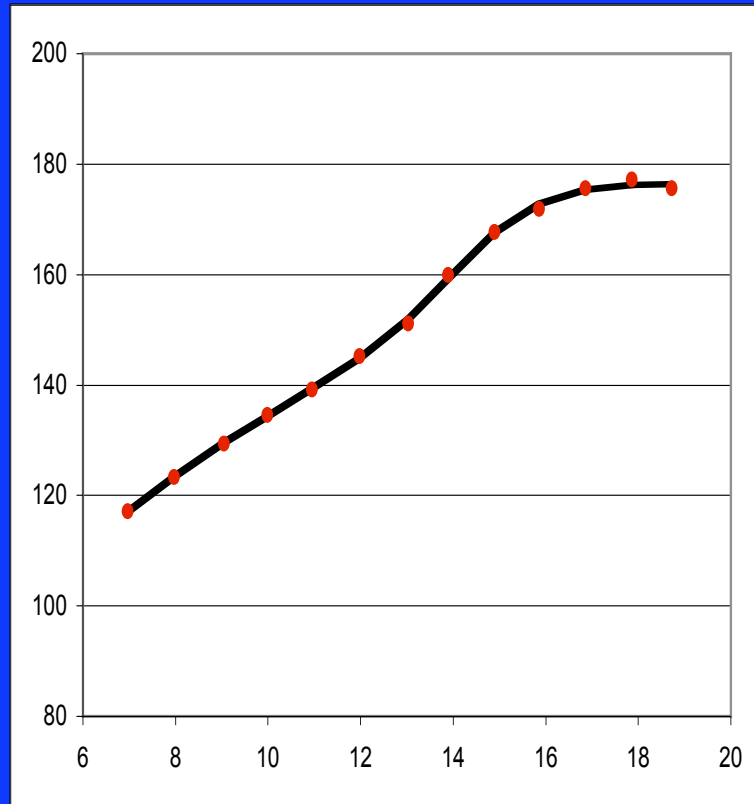
	B	C	D	E	F	G
1	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)	176.5859318
2	117.1	117.0804738	0.000381273		Ht theta	163.518296
3	123.3	123.3681743	0.004647738		S0	0.111118217
4	129.4	129.4859098	0.007380486		theta	14.37569036
5	134.6	134.3753775	0.050455278		S1	1.18644772
6	139.2	139.286176	0.007426305			↑
7	145.2	144.8488079	0.123335894			変化させるセル
8	151.1	151.9459487	0.715629227			
9	159.9	159.2893883	0.372846702			
10	167.8	167.55826	0.058438247			
11	171.9	172.8436823	0.890536238			目的セルの式
12	175.7	175.2989921	0.160807307			↓
13	177.2	176.1740486	1.052576231		sum squares	4.145220316
14	175.6	176.4371137	0.70075939		r	0.999664701
15		↑	↑			
16		PBモデル1の式	差分の二乗の式			

変化させるセル（黄色の部分）に，最適解でのパラメーターの値が表示されています。

青色の部分に，CとD列のそれぞれでは最適値であるときの推定された身長や差分の二乗の値が表示されています。

目的セルに（緑色の部分）最適解での値（最小値）が表示されています。

観測値と予測値の関係のグラフ表示



非常に高い相関係数がえられたことは一目瞭然です。

$$r = 0.999664701$$

- 赤色の点線は観測値
- 黒色の実線は予測値

ソルバーでのモデリングの後、様々な生物学的なパラメーターの求め方

推定された五つのパラメーターやPreece & Bainesの論文での数式から次の生物学的な意味を持つパラメータの計算が可能になります：

最小速度年齢	—	Age at Minimal Velocity	(AMV)
最大速度年齢	—	Age at Peak Velocity	(APV)
最小速度時の現量値	—	Distance at Minimal Velocity	(DMV)
最大速度時の現量値	—	Distance at Peak Velocity	(DPV)
最小速度	—	Minimal Velocity	(MV)
最大速度	—	Peak Velocity	(PV)

最小や最大速度年齢の求め方

- 成長速度の最小や最大の位置が速度曲線をもう一度微分した関数（加速）から得られます（Preece & Baines論文, Appendix, 式18）：

- $ax^2 + bx + c = 0$ の二次式の解は $x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ であるから、

- $s^2 - \frac{1}{2}(s_0 + s_1)s + \frac{1}{2}s_0s_1 = 0$ 式18の解は：

- ① $s = \left\{ \frac{1}{2}(s_0 + s_1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(s_0 + s_1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}s_0s_1\right)} \right\} / 2$ {}から-bを取り出し、されに2で割ると

- ② $s = \frac{1}{4}(s_0 + s_1) \pm \left\{ \sqrt{\frac{1}{4}(s_0 + s_1)^2 - 4\left(\frac{1}{2}s_0s_1\right)} \right\} / 2$ {}にある部分を2で割るとルートの下の作業のため、4で割ることになります。

従って、次式から生物学的なパラメーターを計算するために必要な情報が得られます。

- ③ $s = \frac{1}{4}(s_0 + s_1) \pm \sqrt{\frac{1}{16}(s_0 + s_1)^2 - \frac{1}{2}s_0s_1}$ (Preece & Baines論文, Appendix, 式19)
($\frac{1}{16}(s_0 + s_1)^2 - \frac{1}{2}s_0s_1$ があります。)

- 以前求められた五つのパラメータからs_0やs_1を代入すると、二次式に従ってsのlowとhighの値が算出できます。これらの二つをG列の8と9セルに入れます。G8セルにはs_low、G9セルには、s_highという名前をつけました。

s lowの求め方

◇	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	age	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)	176.5859318		
2	6.968	117.1	117.0804738	0.000381273		Ht theta	163.518296		
3	7.967	123.3	123.3681743	0.004647738		S0	0.111118217		
4	9.046	129.4	129.4859098	0.007380486		theta	14.37569036		
5	9.982	134.6	134.3753775	0.050455278		S1	1.18644772		
6	10.951	139.2	139.286176	0.007426305			↑		
7	11.973	145.2	144.8488079	0.123335894			変化させるセル		
8	13.021	151.1	151.9459487	0.715629227		s-low	$=(s_0+s_1)/4 - \text{SQRT}(((s_0+s_1)^2/16-s_0*s_1/2))$		
9	13.892	159.9	159.2893883	0.372846702		s-high	0.522663665		
10	14.888	167.8	167.55826	0.058438247					
11	15.858	171.9	172.8436823	0.890536238			目的セルの式		
12	16.857	175.7	175.2989921	0.160807307			↓		
13	17.854	177.2	176.1740486	1.052576231		sum squares	4.145220316		
14	18.724	175.6	176.4371137	0.70075939		r	0.999664701		
15			↑	↑					
16			PBモデル1の式	差分の二乗の式					

s highの求め方

◇	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	age	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)	176.5859318		
2	6.968	117.1	117.0804738	0.000381273		Ht theta	163.518296		
3	7.967	123.3	123.3681743	0.004647738		S0	0.111118217		
4	9.046	129.4	129.4859098	0.007380486		theta	14.37569036		
5	9.982	134.6	134.3753775	0.050455278		S1	1.18644772		
6	10.951	139.2	139.286176	0.007426305			↑		
7	11.973	145.2	144.8488079	0.123335894			変化させるセル		
8	13.021	151.1	151.9459487	0.715629227		s-low	0.126119304		
9	13.892	159.9	159.2893883	0.372846702		s-high	$=(s_0+s_1)/4 + \text{SQRT}(((s_0+s_1)^2/16-s_0*s_1/2))$		
10	14.888	167.8	167.55826	0.058438247					
11	15.858	171.9	172.8436823	0.890536238			目的セルの式		
12	16.857	175.7	175.2989921	0.160807307			↓		
13	17.854	177.2	176.1740486	1.052576231		sum squares	4.145220316		
14	18.724	175.6	176.4371137	0.70075939		r	0.999664701		
15			↑	↑					
16			PBモデル1の式	差分の二乗の式					

年齢パラメータを求める

我々にとって、関心のところは年齢であり、従ってPreece & Bainesの論文で式14をtに変換する必要があります。

①
$$s = \frac{s_0 \exp[s_0(t-\theta)] + s_1 \exp[s_1(t-\theta)]}{\exp[s_0(t-\theta)] + \exp[s_1(t-\theta)]}$$
、式の両側を $\exp[s_0(t-\theta)] + \exp[s_1(t-\theta)]$ でかける

②
$$s\{\exp[s_0(t-\theta)] + \exp[s_1(t-\theta)]\} = s_0 \exp[s_0(t-\theta)] + s_1 \exp[s_1(t-\theta)]$$
、左側の{}を開く

③
$$s \exp[s_0(t-\theta)] + s \exp[s_1(t-\theta)] = s_0 \exp[s_0(t-\theta)] + s_1 \exp[s_1(t-\theta)]$$
、似ている指数部分をグループ化する

④
$$s \exp[s_0(t-\theta)] - s_0 \exp[s_0(t-\theta)] = s_1 \exp[s_1(t-\theta)] - s \exp[s_1(t-\theta)]$$
、指数の関連を利用する

⑤
$$(s - s_0) \exp[s_0(t-\theta)] = (s_1 - s) \exp[s_1(t-\theta)]$$
、両側を $\exp[s_1(t-\theta)]$ で割る

⑥
$$\frac{(s - s_0) \exp[s_0(t-\theta)]}{\exp[s_1(t-\theta)]} = (s_1 - s)$$
、両側を $(s - s_0)$ で割る

⑦
$$\frac{\exp[s_0(t-\theta)]}{\exp[s_1(t-\theta)]} = \frac{(s_1 - s)}{(s - s_0)}$$
、指数の法則、 $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ より

⑧
$$\exp[s_0(t-\theta) - s_1(t-\theta)] = \frac{(s_1 - s)}{(s - s_0)}$$
、指数部分内の関連を利用する

⑨
$$\exp[(s_0 - s_1)(t-\theta)] = \frac{(s_1 - s)}{(s - s_0)}$$
、両側の対数をとる

$$\textcircled{10} \quad (s_0 - s_1)(t - \theta) = \ln \frac{(s_1 - s)}{(s - s_0)} \quad \text{、 左側の括弧を開く}$$

$$\textcircled{11} \quad (s_0 - s_1)t - (s_0 - s_1)\theta = \ln \frac{(s_1 - s)}{(s - s_0)} \quad \text{、 グループ化を行う}$$

$$\textcircled{12} \quad (s_0 - s_1)t = \ln \frac{(s_1 - s)}{(s - s_0)} + (s_0 - s_1)\theta \quad \text{、 両側を } (s_0 - s_1) \text{ で割る}$$

$$\textcircled{13} \quad t = \frac{\ln \frac{(s_1 - s)}{(s - s_0)} + (s_0 - s_1)\theta}{(s_0 - s_1)} \quad \text{、 対数の公式 } \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y \text{ より}$$

$$\textcircled{14} \quad t = \frac{\ln(s_1 - s) - \ln(s - s_0) + (s_0 - s_1)\theta}{(s_0 - s_1)} \quad \text{、 } \frac{(a+b)}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \text{ のルールに従って割る}$$

$$\textcircled{15} \quad t = \frac{\ln(s_1 - s) - \ln(s - s_0)}{(s_0 - s_1)} + \theta \quad \text{になります。}$$

この式の右側に代入できるパラメーターは全部そろっています。よって、最小や最大速度時の年齢が求められます。(s_lowは最小速度年齢、s_highは最大速度年齢の計算に代入します)
 以下の式によって最小、最大速度年齢がそれぞれシートのB列の18と19セルに現れます。これらのセルには名前をつけました。B18はAMV、B19はAPVです。

◇	A	B	C	D	E	F	G	
1	age	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)	176.5859318	
2	6.968	117.1	117.0804738	0.00038127		Ht theta	163.518296	
3	7.967	123.3	123.3681743	0.00464774		S0	0.111118217	
4	9.046	129.4	129.4859098	0.00738049		theta	14.37569036	
5	9.982	134.6	134.3753775	0.05045528		S1	1.18644772	
6	10.951	139.2	139.286176	0.0074263			↑	
7	11.973	145.2	144.8488079	0.12333589			変化させるセル	
8	13.021	151.1	151.9459487	0.71562923		s-low	0.126119304	
9	13.892	159.9	159.2893883	0.3728467		s-high	0.522663665	
10	14.888	167.8	167.55826	0.05843825				
11	15.858	171.9	172.8436823	0.89053624			目的セルの式	
12	16.857	175.7	175.2989921	0.16080731			↓	
13	17.854	177.2	176.1740486	1.05257623		sum squares	4.145220316	
14	18.724	175.6	176.4371137	0.70075939		r	0.999664701	
15			↑	↑				
16			PBモデル1の式	差分の二乗の式				
17								
18	Age at Min. Vel.	= $\theta + (\text{LN}(s_{-1} - s_{\text{low}}) - \text{LN}(s_{\text{low}} - s_0)) / (s_0 - s_{-1})$						
19	Age at Peak Vel.	13.93114065						

◇	A	B	C	D	E	F	G	
1	age	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)	176.5859318	
2	6.968	117.1	117.0804738	0.00038127		Ht theta	163.518296	
3	7.967	123.3	123.3681743	0.00464774		S0	0.111118217	
4	9.046	129.4	129.4859098	0.00738049		theta	14.37569036	
5	9.982	134.6	134.3753775	0.05045528		S1	1.18644772	
6	10.951	139.2	139.286176	0.0074263			↑	
7	11.973	145.2	144.8488079	0.12333589			変化させるセル	
8	13.021	151.1	151.9459487	0.71562923		s-low	0.126119304	
9	13.892	159.9	159.2893883	0.3728467		s-high	0.522663665	
10	14.888	167.8	167.55826	0.05843825				
11	15.858	171.9	172.8436823	0.89053624			目的セルの式	
12	16.857	175.7	175.2989921	0.16080731			↓	
13	17.854	177.2	176.1740486	1.05257623		sum squares	4.145220316	
14	18.724	175.6	176.4371137	0.70075939		r	0.999664701	
15			↑	↑				
16			PBモデル1の式	差分の二乗の式				
17								
18	Age at Min. Vel.	10.41577734						
19	Age at Peak Vel.	= $\theta + (\text{LN}(s_{-1} - s_{\text{high}}) - \text{LN}(s_{\text{high}} - s_0)) / (s_0 - s_{-1})$						

最小や最大速度年齢の時の現量値の計算

これは、PBモデル1として知られている式から可能になります。

(Preece & Baines論文、Appendixの式13) 推定された五つのパラメーターや t の値としてさきほど計算された年齢を代入すれば、最小や最大速度の時の現量値が求められます。

$$h = h_1 - \frac{2(h_1 - h_\theta)}{\exp[s_0(t - \theta)] + \exp[s_1(t - \theta)]}$$

最小や最大速度年齢の時の現量値を計算する式をそれぞれB列の20や21のセルに入力します。それらのセルの名前はそれぞれDMVやDPVにしました。

◇	A	B	C	D	E	F	G	
1	age	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)	176.5859318	
2	6.968	117.1	117.0804738	0.00038127		Ht theta	163.518296	
3	7.967	123.3	123.3681743	0.00464774		S0	0.111118217	
4	9.046	129.4	129.4859098	0.00738049		theta	14.37569036	
5	9.982	134.6	134.3753775	0.05045528		S1	1.18644772	
6	10.951	139.2	139.286176	0.0074263			↑	
7	11.973	145.2	144.8488079	0.12333589			変化させるセル	
8	13.021	151.1	151.9459487	0.71562923		s-low	0.126119304	
9	13.892	159.9	159.2893883	0.3728467		s-high	0.522663665	
10	14.888	167.8	167.55826	0.05843825				
11	15.858	171.9	172.8436823	0.89053624			目的セルの式	
12	16.857	175.7	175.2989921	0.16080731			↓	
13	17.854	177.2	176.1740486	1.05257623		sum squares	4.145220316	
14	18.724	175.6	176.4371137	0.70075939		r	0.999664701	
15			↑	↑				
16			PBモデル1の式	差分の二乗の式				
17								
18	Age at Min. Vel.	10.41577734						
19	Age at Peak Vel.	13.93114065						
20	Distance at Min. Vel.	=h_1-((2*(h_1-h_θ))/((EXP(s_0*(AMV-θ)))+(EXP(s_1*(AMV-θ))))))						
21	Distance at Peak Vel.	159.6361011						

◇	A	B	C	D	E	F	G	
1	age	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)	176.5859318	
2	6.968	117.1	117.0804738	0.00038127		Ht theta	163.518296	
3	7.967	123.3	123.3681743	0.00464774		S0	0.111118217	
4	9.046	129.4	129.4859098	0.00738049		theta	14.37569036	
5	9.982	134.6	134.3753775	0.05045528		S1	1.18644772	
6	10.951	139.2	139.286176	0.0074263			↑	
7	11.973	145.2	144.8488079	0.12333589			変化させるセル	
8	13.021	151.1	151.9459487	0.71562923		s-low	0.126119304	
9	13.892	159.9	159.2893883	0.3728467		s-high	0.522663665	
10	14.888	167.8	167.55826	0.05843825				
11	15.858	171.9	172.8436823	0.89053624			目的セルの式	
12	16.857	175.7	175.2989921	0.16080731			↓	
13	17.854	177.2	176.1740486	1.05257623		sum squares	4.145220316	
14	18.724	175.6	176.4371137	0.70075939		r	0.999664701	
15			↑	↑				
16			PBモデル1の式	差分の二乗の式				
17								
18	Age at Min. Vel.	10.41577734						
19	Age at Peak Vel.	13.93114065						
20	Distance at Min. Vel.	136.5708738						
21	Distance at Peak Vel.	=h_1-((2*(h_1-h_θ))/((EXP(s_0*(APV-θ)))+(EXP(s_1*(APV-θ))))))						

最小や最大速度の求め方

最小や最大の速度を求めることにPreece & Bainesの論文で、Appendixの式15（速度関数）が関与してきます。計算するには最小や最大速度年齢の時の現量値それぞれが必要です（ h ）。最小や最大速度を求めることにあたっては、以前計算された s のlowやhighをそれぞれ次の式に代入すれば良いです：

$$velocity = s * (h_1 - h)$$

最小や最大の速度をそれぞれ、シートのB列で22や23セルに入力した式に従って算出します。これらのセルにも名前をつけました。B22はMV、B23はPVです。

◇	A	B	C	D	E	F	G
1	age	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)	176.5859318
2	6.968	117.1	117.0804738	0.00038127		Ht theta	163.518296
3	7.967	123.3	123.3681743	0.00464774		S0	0.111118217
4	9.046	129.4	129.4859098	0.00738049		theta	14.37569036
5	9.982	134.6	134.3753775	0.05045528		S1	1.18644772
6	10.951	139.2	139.286176	0.0074263			↑
7	11.973	145.2	144.8488079	0.12333589			変化させるセル
8	13.021	151.1	151.9459487	0.71562923		s-low	0.126119304
9	13.892	159.9	159.2893883	0.3728467		s-high	0.522663665
10	14.888	167.8	167.55826	0.05843825			
11	15.858	171.9	172.8436823	0.89053624			目的セルの式
12	16.857	175.7	175.2989921	0.16080731			↓
13	17.854	177.2	176.1740486	1.05257623		sum squares	4.145220316
14	18.724	175.6	176.4371137	0.70075939		r	0.999664701
15			↑	↑			
16			PBモデル1の式	差分の二乗の式			
17							
18	Age at Min. Vel.	10.41577734					
19	Age at Peak Vel.	13.93114065					
20	Distance at Min. Vel.	136.5708738					
21	Distance at Peak Vel.	159.6361011					
22	Minimum Velocity	=s_low*(h_1-DMV)					
23	Peak Velocity	8.859060613					

◇	A	B	C	D	E	F	G
1	age	height observed	height predicted	d^2		final ht (h1)	176.5859318
2	6.968	117.1	117.0804738	0.00038127		Ht theta	163.518296
3	7.967	123.3	123.3681743	0.00464774		S0	0.111118217
4	9.046	129.4	129.4859098	0.00738049		theta	14.37569036
5	9.982	134.6	134.3753775	0.05045528		S1	1.18644772
6	10.951	139.2	139.286176	0.0074263			↑
7	11.973	145.2	144.8488079	0.12333589			変化させるセル
8	13.021	151.1	151.9459487	0.71562923		s-low	0.126119304
9	13.892	159.9	159.2893883	0.3728467		s-high	0.522663665
10	14.888	167.8	167.55826	0.05843825			
11	15.858	171.9	172.8436823	0.89053624			目的セルの式
12	16.857	175.7	175.2989921	0.16080731			↓
13	17.854	177.2	176.1740486	1.05257623		sum squares	4.145220316
14	18.724	175.6	176.4371137	0.70075939		r	0.999664701
15			↑	↑			
16			PBモデル1の式	差分の二乗の式			
17							
18	Age at Min. Vel.	10.41577734					
19	Age at Peak Vel.	13.93114065					
20	Distance at Min. Vel.	136.5708738					
21	Distance at Peak Vel.	159.6361011					
22	Minimum Velocity	5.046671257					
23	Peak Velocity	=s_high*(h_1-DPV)					

参考文献

- Preece MA, Baines MJ (1978) A new family of mathematical models describing the human growth curve. *Ann Hum Biol*, 5: 1-24.
- Ward R, Schlenker J, Anderson GS (2001) Simple method for developing percentile growth curves for height and weight. *Am J Phys Anthropol*, 116: 246-50.
- 苅田正雄, 中西元子, 上田太一郎 (2003) Excelで出来る最適化の実践らくらく読本 –ソルバーで自由自在に解く–。同友館, 東京。